Αλγεβρικες Δομες I

Παρασκευη 13 Ιουνιου 2014

Θέμα 1. ☞ **[10]** Έστω G μια κυκλική ομάδα η οποία έχει ακριβώς οκτώ υποομάδες, τρεις εκ των οποίων έχουν τάξη 2, 19 και 53 αντίστοιχα. Να βρεθεί με ποιά γνωστή σας ομάδα είναι ισόμορφη η G.

Θέμα 2. ☞ **[10]** Να βρεθεί το διάγραμμα Hasse των υποομάδων της κυκλικής υποομάδας $\langle \rho \rangle$ της S_9 η οποία παράγεται από την μετάθεση

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 1 & 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Θέμα 3. ☞ **[15]** Έστω η ομάδα ευθύ γινόμενο $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$, και τα στοιχεία της $x = ([2]_4, [4]_6)$ και $y = ([3]_4, [2]_6)$.

1. Να βρεθούν οι τάξεις των στοιχείων x και y.
2. Να βρεθεί η τάξη του στοιχείου $y + \langle x \rangle$ στην ομάδα πηλίκο $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6)/\langle x \rangle$.
3. Είναι η ομάδα πηλίκο $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6)/\langle x \rangle$ κυκλική; Αν είναι κυκλική, να προσδιορίσετε ένα γεννήτορά της.

Θέμα 4. ☞ **[10]** Έστω $\mathbb{C}^*$ η πολλαπλασιαστική ομάδα των μη-μηδενικών μιγαδικών αριθμών, και έστω

$$\mathsf{T} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$$

1. Δείξτε ότι το υποσύνολο T είναι μια υποομάδα της $\mathbb{C}^*$.
2. Με ποιά ομάδα είναι ισόμορφη η ομάδα πηλίκο $\mathbb{C}^*/\mathsf{T}$;

Θέμα 5. ☞ **[20]** Θεωρούμε τα ακόλουθα στοιχεία της συμμετρικής ομάδας S_9:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 6 & 1 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 1 & 9 & 2 & 7 & 8 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Να γραφούν οι μεταθέσεις σ και τ ως γινόμενα ξένων κύκλων και αντιμεταθέσεων, και να εξετασθεί αν οι μεταθέσεις σ και τ είναι περιττές ή άρτιες.
2. Να υπολογιστούν οι τάξεις των στοιχείων σ^{2014} και τ^{2013}.
3. Να υπολογιστεί η τάξη της κυκλικής υποομάδας $\langle \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} \rangle$.
4. Να εξεταστεί αν υπάρχει $\rho \in S_9$ έτσι ώστε: $\rho \sigma \rho^{-1} = \tau$.
5. Να υπολογιστεί η τάξη της τομής $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle$.

Θέμα 6. ☞ **[10]** Δείξτε ότι κάθε ιδεώδες του δακτυλίου $\mathbb{Z}$ των ακεραίων είναι κύριο.

Θέμα 7. ☞ **[10]** Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα. Αν ο R έχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, δείξτε ότι κάθε πρώτο ιδεώδες του R είναι μέγιστο.

Θέμα 8. ☞ **[20]** Θεωρούμε το ακόλουθο υποσύνολο του δακτυλίου $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ των 3×3 πινάκων υπεράνω του $\mathbb{R}$:

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

και τα υποσύνολα του

$$I = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid b, c \in \mathbb{R} \right\} \;\&\; J = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid b \in \mathbb{R} \right\} \;\&\; K = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid c \in \mathbb{R} \right\}$$

1. Να δείξετε ότι το σύνολο R είναι ένας μεταθετικός υποδακτύλιος του δακτυλίου $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Να δείξετε ότι το υποσύνολο I είναι ένα μέγιστο ιδεώδες του R και να προσδιορισθεί με ποιόν γνωστό σας δακτύλιο είναι ισόμορφος ο δακτύλιος πηλίκο R/I.
3. Να δείξετε ότι τα υποσύνολα J και K είναι ιδεώδη του R και να εξετασθεί αν είναι πρώτα ή μέγιστα.
4. Έστω $\mathsf{U}(R)$ η πολλαπλασιαστική ομάδα των αντιστρεψίμων στοιχείων του δακτυλίου R. Να προσδιορίσετε υποομάδα H της $\mathsf{U}(R)$ και έναν ισομορφισμό ομάδων $\mathsf{U}(R)/H \cong \mathbb{R}^*$.

Καλη Επιτυχια!